(parte I)
Instrumentação eletrônica para sistemas de medição

Capítulo 3

Caracterização estática de sistemas de medição

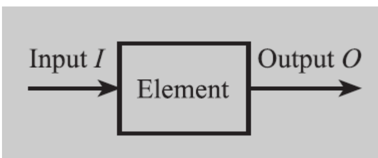
Prof. Lélio R. Soares Júnior – ENE – FT – UnB

Caracterização estática de sistemas de medição

Conceito

Características estáticas do elemento:

✓ Assume-se que a entrada I é constante ou varia muito lentamente. A saída é avaliada em regime permanente.



Caracterização estática de sistemas de medição

Características sistemáticas

- ✓ São as características que podem ser quantificadas analítica ou graficamente de forma exata. Características estatísticas serão vistas posteriormente

a) Faixa de indicação (*range*) – a faixa de indicação de entrada é especificada pelos valores mínimo e máximo de entrada (I_{min} a I_{max}) e a faixa de indicação de saída é especificada pelos valores mínimo e máximo de saída (O_{min} a O_{max}).

Ex: um termopar pode ter uma faixa de indicação de entrada de 100 a 250ºC e uma faixa de indicação de saída de 4 a 10mV.

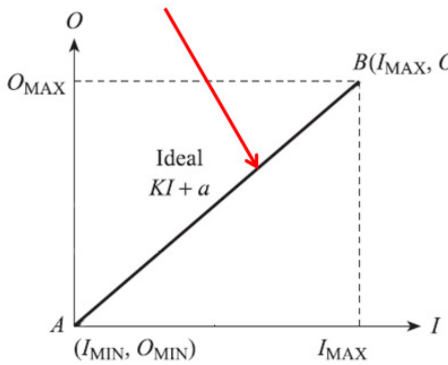
b) Faixa de operação (*span*) – Máxima variação na entrada (I_{max} - I_{min}) e máxima variação na saída (O_{max} - O_{min})

Ex. para o ex. anterior o termopar tem um faixa de operação de entrada de 150ºC e uma faixa de operação de saída de 6mV

Caracterização estática de sistemas de medição

Características sistemáticas

c) Linha reta ideal – No plano O *versus* I é a linha reta que liga os pontos A (I_{min} , O_{min}) e B (I_{max}, O_{max}). No caso ideal assume-se o elemento como linear em termos de variação.



$$O - O_{MIN} = \left[\frac{O_{MAX} - O_{MIN}}{I_{MAX} - I_{MIN}}\right](I - I_{MIN})$$

Caracterização estática de sistemas de medição

Características sistemáticas

$$O - O_{MIN} = \left[\frac{O_{MAX} - O_{MIN}}{I_{MAX} - I_{MIN}}\right](I - I_{MIN})$$

Linha reta ideal:

$$O_{IDEAL} = KI + a$$

Inclinação da linha reta ideal:

$$K = \text{ideal straight-line slope} = \frac{O_{MAX} - O_{MIN}}{I_{MAX} - I_{MIN}}$$

Interceptação da linha reta ideal:

$$a = \text{ideal straight-line intercept} = O_{MIN} - KI_{MIN}$$

Ex: para o termopar:

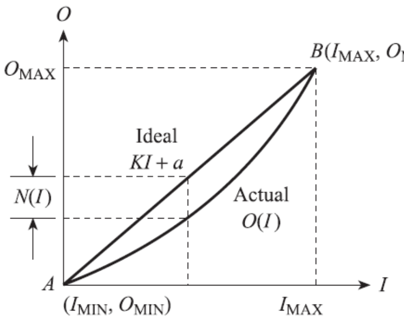
$$K = \frac{1}{25} mV/^{o}C \quad e \quad a = 0mV$$

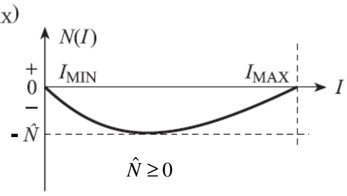
Obs. Características não ideais são quantificadas a partir de desvios em relação à linha reta ideal.

Caracterização estática de sistemas de medição

Características sistemáticas

d) Não linearidade – Definida pela função ***N(I)*** que é dada pela diferença entre a curva real e a linha reta ideal.





Caracterização estática de sistemas de medição

Características sistemáticas

$$N(I) = O(I) - (KI + a)$$

$$O(I) = KI + a + N(I)$$

Máxima não linearidade percentual em termos da máxima não linearidade absoluta $\hat{N}$ e da deflexão de *fundo de escala* (O_{max} - O_{min}):

$$\text{Max. non-linearity as a percentage of f.s.d.} = \frac{\hat{N}}{O_{\text{MAX}} - O_{\text{MIN}}} \times 100\%$$

Em muitos casos tem-se uma caracterização polinomial para a relação entre $O(I)$ e I e consequentemente $N(I)$ em relação a I:

$$O(I) = a_0 + a_1 I + a_2 I^2 + \ldots + a_q I^q + \ldots + a_m I^m = \sum_{q\ 0}^{q\ m} a_q I^q$$

Caracterização estática de sistemas de medição

Características sistemáticas

Ex: Para um termopar tipo T (cobre-constantan) com T (temperatura) em ^oC e $E(T)$ (tensão na junção bimetálica) em μV:

$$E(T) = 38.74T + 3.319 \times 10^{-2}T^2 + 2.071 \times 10^{-4}T^3 - 2.195 \times 10^{-6}T^4 + \text{higher-order terms up to } T^8$$

Para uma faixa de indicação de 0 a 400ºC, $E=0\mu V$ *a* 0^oC *e* $E=20869\mu V$ *a* 400^oC : $E_{ideal} = 52,17T$, *assim*

$$\begin{aligned} N(T) &= E(T) - E_{\text{IDEAL}} \\ &= -13.43T + 3.319 \times 10^{-2}T^2 + 2.071 \times 10^{-4}T^3 \\ &\quad - 2.195 \times 10^{-6}T^4 + \text{higher-order terms} \end{aligned}$$

Obs. Em muitos outros casos, uma caracterização não polinomial pode ser mais adequada para caracterizar a curva real do elemento, como por exemplo uma função exponencial.

Caracterização estática de sistemas de medição

Características sistemáticas

e) Sensibilidade – Dada por $dO(I)/dI$.

$$dO(I)/dI = K + dN(I)/dI$$

No caso ideal $dO(I)/dI = K$, ou seja, a inclinação da linha reta ideal

Caracterização estática de sistemas de medição

Características sistemáticas

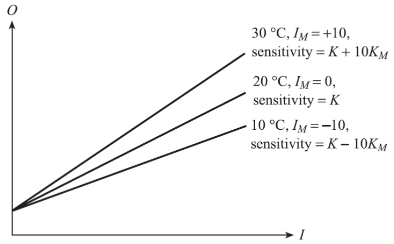
f) Efeitos ambientais – A saída $O(I)$ também como função de variáveis externas (temperatura, pressão, umidade, tensão de alimentação, etc.)

Existem dois tipos de entradas ambientais externas:

- ✓ modificadoras
- ✓ de interferência

Entrada modificadora (I_M) – Modifica a sensibilidade do elemento:

$K \rightarrow K + K_M.I_M$, onde em condições normais (padrão) $I_M = 0$.

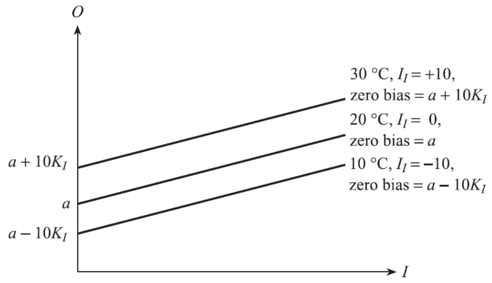


Caracterização estática de sistemas de medição

Características sistemáticas

Entrada de interferência (I_I) – Modifica o ponto de cruzamento da curva do elemento com o eixo O (zero bias):

$a \rightarrow a + K_I.I_I$, onde em condições normais (padrão) $I_I = 0$.



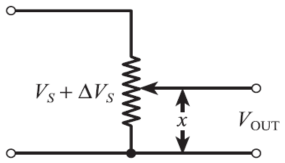
Caracterização estática de sistemas de medição

Características sistemáticas

De forma geral, considerando os efeitos ambientais e as correspondentes constantes de acoplamento (ou sensibilidades), K_I e K_M:

$$O = KI + a + N(I) + K_M I_M I + K_I I_I$$

Exemplo de entrada modificadora: sensor de deslocamento potenciométrico, com deslocamento relativo x ($0 \leq x \leq 1$): Modificação causada por variação na tensão de alimentação.



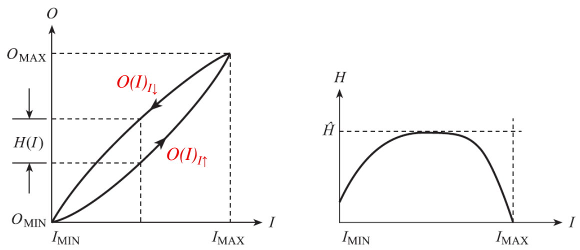
$$\begin{aligned} V_{OUT} &= (V_S + \Delta V_S)x \\ &= V_S x + \Delta V_S x \end{aligned}$$

Caracterização estática de sistemas de medição

Características sistemáticas

g) Histerese – Funções $O(I)_{I\uparrow}$ e $O(I)_{I\downarrow}$, para I variando em sentidos contrários (crescente/decrescente):

$$I\uparrow \rightarrow O(I)_{I\uparrow} \; e \; I\downarrow \rightarrow O(I)_{I\downarrow}$$



$$\text{Hysteresis } H(I) = O(I)_{I\downarrow} - O(I)_{I\uparrow}$$

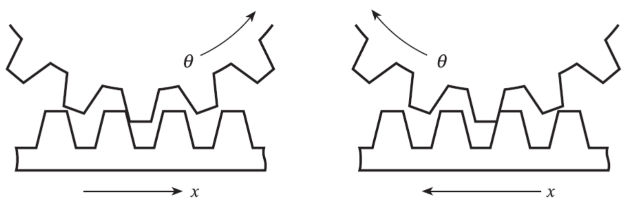
Caracterização estática de sistemas de medição

Características sistemáticas

Em termos do valor máximo absoluto de histerese e da deflexão de fundo de escala:

$$\text{Maximum hysteresis as a percentage of f.s.d.} = \frac{\hat{H}}{O_{MAX} - O_{MIN}} \times 100\%$$

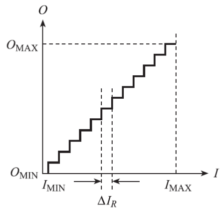
Ex - Sistema de engrenagens para converter movimento de translação em movimento de rotação: Problema de folga (*backlash*)

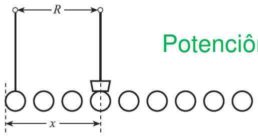


Caracterização estática de sistemas de medição

Características sistemáticas

h) Resolução – Corresponde à máxima variação em I tal que não ocorra variação em O, ou seja, ΔI_R. O varia em saltos discretos.





Potenciômetro de fio

Em termos do valor de resolução ΔI_R e da deflexão de fundo de escala (para entrada), tem-se de forma relativa:

$$\frac{\Delta I_R}{I_{\mathrm{MAX}} - I_{\mathrm{MIN}}} \times 100\%$$

Caracterização estática de sistemas de medição

Características sistemáticas

i) Desgaste e envelhecimento – K e a variam lentamente ao longo da vida do elemento.

Ex: mola com constante k

Força da mola: $F(x) = k(t).x$, onde $k(t) = k_0\text{-}bt$, onde

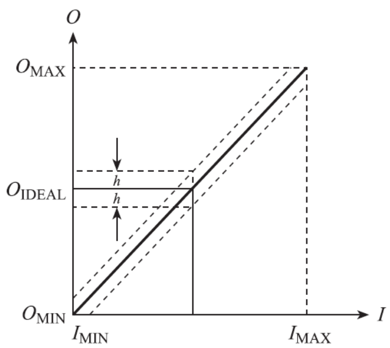
$x \rightarrow$ deformação (deslocamento) da mola
$k_0 \rightarrow$ constante inicial da mola
$b \rightarrow$ é uma constante de envelhecimento

Caracterização estática de sistemas de medição

Características sistemáticas

j) Banda de erro – Pode ser utilizada para representar efeitos de não linearidade, resolução e histerese conjuntamente, sem distinção específica.

O fabricante pode especificar que para um dado I, O assumirá um certo valor dentro da faixa de $\pm h$ em relação à linha reta ideal.

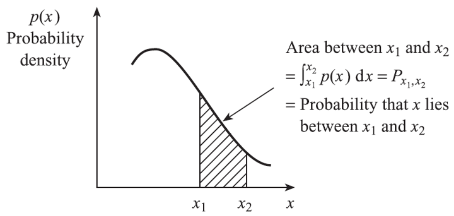


Caracterização estática de sistemas de medição

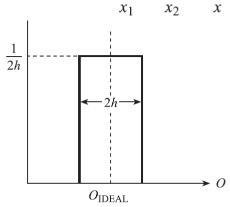
Características sistemáticas

- ✓ Pode-se especificar a banda de erro de forma probabilística (em termos de probabilidade).
- ✓ Dada uma certa função densidade de probabilidade, $p(x)$, para uma certa variável aleatória x, então a probabilidade de x estar no intervalo entre x_1 e x_2 é dado por P_{x1x2}:

$$P_{x_1x_2} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx$$



No caso de um elemento com função densidade de probabilidade retangular:

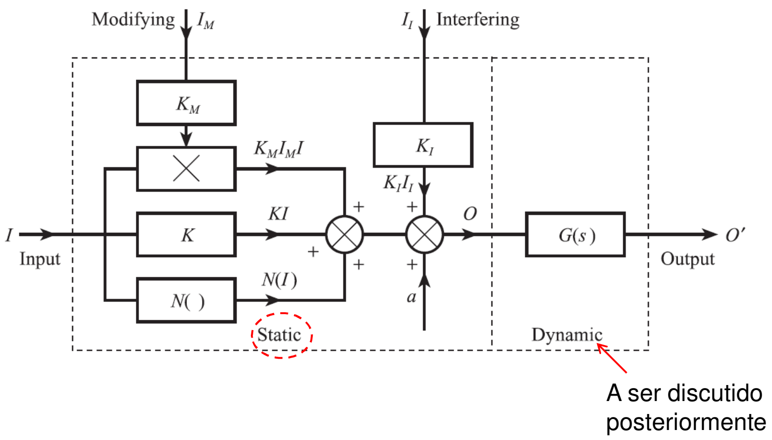


Caracterização estática de sistemas de medição

Modelo generalizado de um elemento do sistema

Desprezando-se histerese e resolução, mas considerando efeitos ambientais e não linearidades:

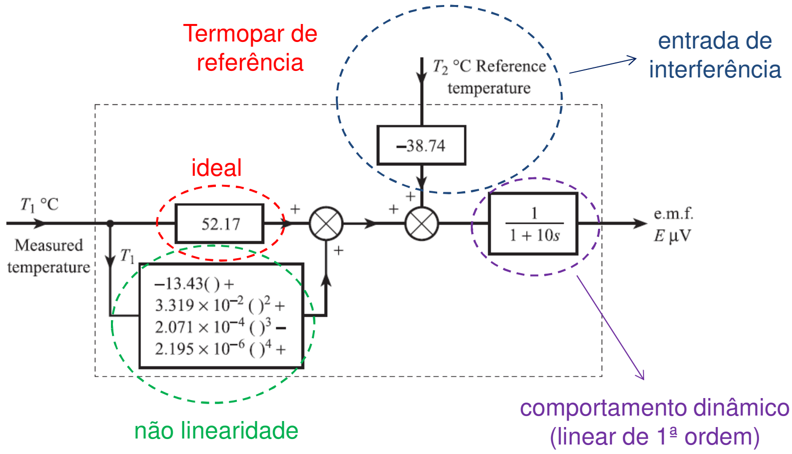
$$O = KI + a + N(I) + K_M I_M I + K_I I_I$$



Caracterização estática de sistemas de medição

Modelo generalizado de um elemento do sistema

Ex: Termopar Tipo T (cobre-constantan) em operação de 0 a 400ºC

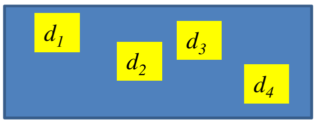


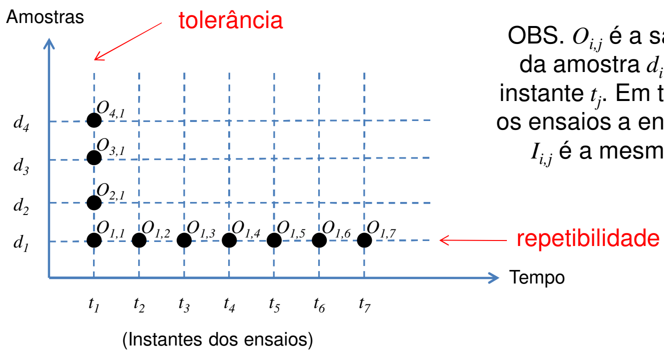
Caracterização estática de sistemas de medição

Características estatísticas

Ensaios de 4 elementos do mesmo tipo:

4 amostras do mesmo tipo de elemento





OBS. $O_{i,j}$ é a saída da amostra d_i no instante t_j. Em todos os ensaios a entrada $I_{i,j}$ é a mesma.

Caracterização estática de sistemas de medição

Características estatísticas

Variações estatísticas na saída de um elemento com o tempo - repetibilidade

- ✓ Fenômeno: para I constante, são feitas medidas periódicas de O e para cada medida encontra-se um O diferente → Falta de repetibilidade.
- ✓ Causas: flutuações aleatórias de I_M e I_I (K_M, K_I diferentes de zero) e também flutuações em I (devido a flutuações aleatórias na saída do elemento precedente).
- ✓ Pode-se modelar as flutuações de I_M , I_I e I com funções densidade de probabilidade do tipo normal (gaussiana), $p(x)$:

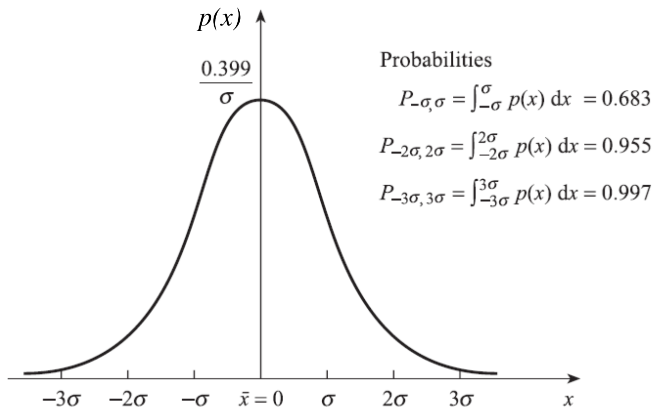
$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}\right]$$

$\bar{x}$: *média ou valor esperado (centro da distribuição)*

σ : desvio padrão (espalhamento da distribuição)

Caracterização estática de sistemas de medição

Características estatísticas



Ex: Função densidade de probabilidade normal com média nula

Caracterização estática de sistemas de medição

Características estatísticas

Como

$$O = KI + a + N(I) + K_M I_M I + K_I I_I$$

o valor médio da saída do elemento será dada por

$$\bar{O} = K\bar{I} + a + N(\bar{I}) + K_M \bar{I}_M \bar{I} + K_I \bar{I}_I$$

Seja ΔO um pequeno desvio de O em relação a seu valor médio causado por pequenos desvios ΔI, ΔI_M e ΔI_I em relação aos respectivos valores médios, então

$$\Delta O = \left(\frac{\partial O}{\partial I}\right)\Delta I + \left(\frac{\partial O}{\partial I_M}\right)\Delta I_M + \left(\frac{\partial O}{\partial I_I}\right)\Delta I_I$$

Caracterização estática de sistemas de medição

Características estatísticas

Do estudo de probabilidade tem-se

$$\sigma_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial O}{\partial I}\right)^2 \sigma_I^2 + \left(\frac{\partial O}{\partial I_M}\right)^2 \sigma_{I_M}^2 + \left(\frac{\partial O}{\partial I_I}\right)^2 \sigma_{I_I}^2}$$

O tem distribuição normal. Assumindo que I_M , I_I e I são independentes:

$$p(O) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(O-\bar{O})^2}{2\sigma_0^2}\right]$$

Caracterização estática de sistemas de medição

Características estatísticas

Variações estatísticas sobre um lote de elementos similares - tolerância

- ✓ Ex: Lote de resistores termométricos (metálicos) com resistência nominal (R_0) de 100,0Ω.
- ✓ Alguns valores medidos: 99,8Ω, 100,1Ω, 99,9Ω, 100,0Ω, 100,2Ω.
- ✓ Distribuidos estatisticamente em torno do valor nominal
- ✓ Causa: flutuações na manufatura.
- ✓ Uma boa representação é por uma distribuição normal (gaussiana)

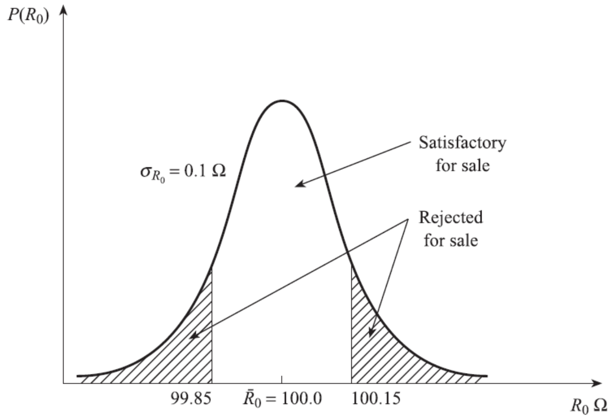
$$p(R_0) = \frac{1}{\sigma_{R_0}\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-(R_0-\bar{R}_0)^2}{2\sigma_{R_0}^2}\right]$$

Caracterização estática de sistemas de medição

Características estatísticas

$\overline{R}_0$ é a média (100,0Ω) e σ_{R0} é o desvio padrão da distribuição (0,15Ω por exemplo)

Geralmente tem-se a especificação: $R_0 \rightarrow$ 100,0Ω±0,15Ω



Caracterização estática de sistemas de medição

Características estatísticas

De forma geral:

$$p(O) = \frac{1}{\sigma_0\sqrt{2\pi}}\exp\left[\frac{-(O-\bar{O})^2}{2\sigma_0^2}\right]$$

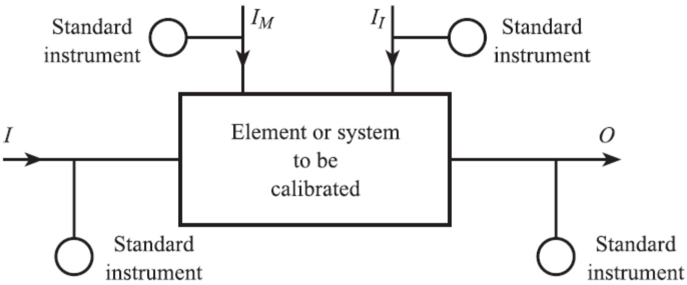
$$\bar{O} = \bar{K}\bar{I} + \bar{N}(\bar{I}) + \bar{a} + \bar{K}_M\bar{I}_M\bar{I} + \bar{K}_I\bar{I}_I$$

$$\sigma_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial O}{\partial I}\right)^2\sigma_I^2 + \left(\frac{\partial O}{\partial I_M}\right)^2\sigma_{I_M}^2 + \left(\frac{\partial O}{\partial I_I}\right)^2\sigma_{I_I}^2 + \left(\frac{\partial O}{\partial K}\right)^2\sigma_K^2 + \left(\frac{\partial O}{\partial a}\right)^2\sigma_a^2 + \ldots}$$

Caracterização estática de sistemas de medição

Identificação das características estáticas - calibração

Para I constante ou variando lentamente

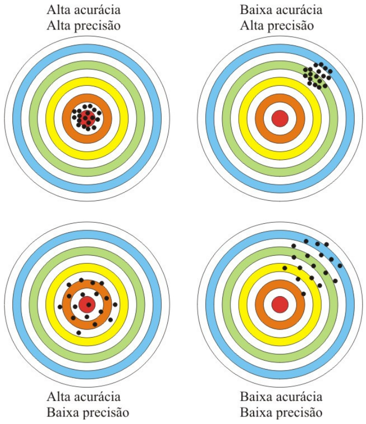


Considera-se como valor verdadeiro de uma variável de entrada do elemento como aquela medida a partir de instrumentos com a melhor precisão e acurácia possíveis, disponível ao fabricante do elemento.

Caracterização estática de sistemas de medição

Identificação das características estáticas - calibração

Distinção entre acurácia (exatidão) e precisão:



Precisão está relacionada ao grau de refinamento da execução da operação.
É uma indicação da uniformidade ou reprodutibilidade dos resultados.